第 3 講　群数列，漸化式

PART1　群数列として考える

1　数列 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, …… について，次の問いに答えよ。

(1)　$\frac{7}{18}$ は第何項か。

(2)　第 200 項を求めよ。

(3)　初項から第 200 項までの和を求めよ。

Point Pickup

数列を，ある規則によっていくつかの群に分けて考える(群数列として考える)とき，

・もとの数列の一般項や規則性

・第 n 群の項数，初項，末項

に着目するとよい。

第 3 講　PART1　確認問題

1 数列 $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{1}{5}$, ……

について，次の問いに答えよ。

(1) $\frac{11}{8}$ は第何項か。

第 [アイ] 項

(2) 第 800 項を求めよ。

$\frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$

(3) 初項から第 800 項までの和を求めよ。

[キクケ]

第 3 講　群数列，漸化式

PART1　群数列として考える

1　数列 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, …… について，次の問いに答えよ。

(1)　$\frac{7}{18}$ は第何項か。

(2)　第 200 項を求めよ。

(3)　初項から第 200 項までの和を求めよ。

与えられた数列を，分母が等しい分数を群として分けると

$$\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\,\Big|\,\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}\,\Big|\,\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\,\Big|\,\frac{1}{6},\ \cdots\cdots$$

となり，第 n 群に n 個の項を含む。

第 n 群の初項は $\frac{1}{n+1}$，末項は $\frac{n}{n+1}$ である。

また，第 1 群から第 n 群までの項数は $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ である。

(1)　$\frac{7}{18}$ は第 17 群の 7 番目の項である。

第 16 群までの項数は $\frac{1}{2}\cdot16\cdot17=136$ であるから，$\frac{7}{18}$ は第 143 項である。

(2)　第 200 項が第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<200\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$(n-1)n<400\leqq n(n+1)$$

$19\cdot20=380$，$20\cdot21=420$ より，不等式を満たす自然数は　$n=20$

よって，第 200 項は第 20 群に属する。

第 19 群までの項数は $\frac{1}{2}\cdot19\cdot20=190$ であるから，求める項は第 20 群の 10 番目の項，

すなわち $\frac{10}{21}$ である。

(3)　第 n 群に含まれるすべての項の和は　$\dfrac{1}{2}n\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}n$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{19}\frac{1}{2}k+\left(\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\cdots\cdots+\frac{10}{21}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot19\cdot20+\frac{10}{2}\left(\frac{1}{21}+\frac{10}{21}\right)=95+\frac{55}{21}=\frac{2050}{21}$$

第 3 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] アイ：34，ウエ：39，オカ：40，

キクケ：790

[解説]

与えられた数列を，分母が等しい分数を群として分けると

$$\frac{1}{1}\Big|\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\Big|\frac{1}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{5}{3}\Big|\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\Big|\frac{1}{5},\ \cdots\cdots$$

[A]

となり，第 n 群に n 個の項を含む。

第 n 群の

初項は $\dfrac{1}{n}$　　k 番目の項は $\dfrac{2k-1}{n}$

末項は $\dfrac{2n-1}{n}$

である。

また，第 1 群から第 n 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

である。

(1)　$\dfrac{11}{8}=\dfrac{2\cdot6-1}{8}$ は，第 8 群の 6 番目の項である。

第 7 群までの項数は $\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot8=28$ であるから，

$\dfrac{11}{8}$ は $28+6=34$ より，第 34 項である。

(2)　第 800 項が第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<800\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$(n-1)n<1600\leqq n(n+1)$$

$39\cdot40=1560$，$40\cdot41=1640$ より，

不等式を満たす自然数は　$n=40$

> [A]　数列を，ある規則によっていくつかの群に分けて考える（群数列として考える）とき，
> ・もとの数列の一般項や規則性
> ・第 n 群の項数，初項，k 番目の項，末項
> などに着目するとよい。

よって，第 800 項は，第 40 群に属する。

第 39 群までの項数は $\frac{1}{2}\cdot 39\cdot 40=780$ であるから，$800-780=20$ より，求める項は第 40 群の 20 番目の項，すなわち $\frac{2\cdot 20-1}{40}=\mathbf{\frac{39}{40}}$ である。

(3)　第 n 群に含まれるすべての項の和は

$$\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{n}+\frac{2n-1}{n}\right)=n$$ [B]

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{39}k+\left(\frac{1}{40}+\frac{3}{40}+\cdots\cdots+\frac{39}{40}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 39\cdot 40+\frac{20}{2}\left(\frac{1}{40}+\frac{39}{40}\right)=\mathbf{790}$$ [B]

[B]　初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$$